Actes de la IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2012) p. 27-33

ALGUNES DEFINICIONS D'APOL·LONI AMB EL GEOGEBRA

FERRAN DACHS;[1] TRINI CADEFAU[2]
[1] ESTUDIANT DEL MAMME DE LA FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA DE LA UPC.
[2] IES PERE BORRELL, PUIGCERDÀ.

Paraules clau: *diàmetre, eix, còniques, Apol·loni*

Some definitions of Apollonius with the GeoGebra

Sumary: *Conics are present everywhere, many objects of daily life fit its shapes and we take advantage of its properties, even though sometimes we are not conscious of it. The first systematic study of conics is due to Apollonius of Pergamon, called by his contemporaries «the great geometer». He would be the first to obtain the conics as flat sections of the same cone with circular base, in order to study its properties. Moreover, he would give them the name we call them nowadays.*

The present project is an interdisciplinary activity for 16-to18-year-old students. The main goal is to use GeoGebra programme to analyze some of the definitions that Apollonius began his project with and to look into his proposals.

Key words: *diameter, axe, conics, Apolloni*

Les còniques les trobem presents arreu, molts objectes de la nostra vida quotidiana adopten les seves formes i n'aprofitem les seves propietats, tot i que moltes vegades no en som conscients. El primer estudi sistemàtic de les còniques es deu a Apol·loni de Pèrgam (246-221? – 170 aC), anomenat pels seus contemporanis «el gran geòmetra». Ell serà el primer que obtindrà les còniques com a seccions planes d'un mateix con de base circular, per després estudiar-ne les seves propietats. També les anomenarà pel nom amb què ara les coneixem.

El GeoGebra és un programa educatiu lliure que permet dibuixar elements i figures geomètriques alhora que proporciona la seva expressió algèbrica o valor, i viceversa, és a dir combina geometria, àlgebra i càlcul. Per tant, és òptim per a l'estudi de les còniques i les seves propietats.

Les pautes de l'activitat proposada es poden concretar en: primer, es proporcionarà a l'alumne les definicions amb les quals Apol·loni inicia el seu tractat de les còniques, i es farà una lectura prèvia a fi d'interpretar-les. Després, per a cada cònica, utilitzant el joc que ens proporciona el GeoGebra, caldrà determinar i limitar els elements que Apol·loni defineix, conseqüentment l'alumne haurà de pautar les definicions per poder fer les construccions amb el GeoGebra. A continuació es compararan aquelles definicions amb les actuals. I per acabar es pot completar el treball analitzant alguna proposició o alguna de les propietats de les còniques amb el GeoGebra.

Introducció

No es coneix gaire la vida d'Apol·loni; de les poques dades que es coneixen amb certesa és que va néixer a Pèrgam, ciutat de Pamfília al sud de l'Àsia Menor, a l'actual Turquia, en l'època en què Ptolemeu Evergates era rei d'Egipte (entre el 246 i el 221 aC). Segons Ptolemeu Chenus va estudiar matemàtiques a Egipte, concretament al Museu d'Alexandria, amb els deixebles d'Euclides, ja sota el regnat de Ptolemeu Philopator (entre el 221 i el 205 aC) on començà a destacar com a geòmetra i astrònom (Ver Eecke, 1963: VII) .

La majoria d'evidències que tenim sobre la seva vida ens les dóna ell mateix en els prefacis dels diferents llibres de *Les Còniques*. Gràcies a això sabem per exemple que tenia relació amb els principals geòmetres de l'època, així com que va visitar Pergamum i Ephesus. Els prefacis dels tres primers llibres estan adreçats a Eudemus de Pergamum, però pel quart sabem que Eudemus és mort, i a partir d'aquests els envia a un tal Attalus. Gràcies a aquests preàmbuls sabem que coneix el geòmetra Philonide, que *Les Còniques* són corregides a instàncies de Naucrate i ens menciona altres geòmetres que van dedicar-se a estudiar les corbes de segon grau.

Apol·loni, però, va tenir els seus detractors. El bibliògraf Heràclit considera Arquimedes com l'inventor de la majoria de proposicions sobre les còniques, però que va negligir en no publicar-les. Però a l'hora de la veritat sembla que Arquimedes utilitza proposicions enunciades per Euclides i Aristée el Vell (Ver Eecke, 1963: IX-X). Es creu que Apol·loni va morir l'any 170 aC. La seva influència s'estén a autors com Johannes Kepler (1571-1630), Blaise de Pascal (1623-1662) o Edmund Halley (1656-1742), que s'encarregarà de la primera traducció al llatí.

L'obra més important d'Apol·loni és el seu tractat sobre les còniques; aquest està dividit en 8 llibres dels quals només ens n'han arribat set, els quatre primers en grec, i els tres últims a través d'una traducció àrab del segle IX que va ser traduïda al llatí al segle XVII. El llibre VIII es va perdre, però el 1646 Halley, meravellat per l'obra d'Apol·loni, va intentar reconstruir-lo a partir dels fragments que n'hi havia en altres obres (Ver Eecke, 1963: XXI).

A la Biblioteca de Catalunya es conserva una versió llatina dels textos del segle XVI, concretament és la traducció del grec al llatí de l'any 1537 feta per Ioanem Baptifta Memun, procedent de Venècia, que si més no és curiós de veure, n'assenyalaríem els preciosos dibuixos que acompanyen els textos (Fig. 1).

Molts autors el destaquen com la culminació de la matemàtica grega: no només per la seva rigorositat i completesa, sinó també perquè marca el punt de màxima esplendor de la matemàtica, i en especial de la geometria grega, oferint una visió més actual de les corbes: la construcció d'Apol·loni permet expressar les corbes amb un sistema de referència. Aquests avenços i la completesa li valdran que sigui considerada una obra de referència fins a l'època de Descartes.

Les Còniques és un llibre molt extens (amb més de 400 proposicions, i nombroses definicions i corol·laris), molt rigorós i amb una forma d'enunciar les proposicions molt precisa en les paraules, però dificultós a l'hora de comprendre-les. Tot això fa que sigui un llibre complex de llegir i d'estudiar que surt com a referència en molts treballs però que realment pocs treballin amb l'obra original.

FIGURA 1. Portada de *Les Còniques* d'Apol·loni.

El primer llibre del tractat sobre *Les Còniques* comença amb un prefaci, on presenta el que serà *Les Còniques* explicant-ne la seva divisió. Conté 60 proposicions i alguns corol·laris. Amb 8 definicions relatives a la generació de les superfícies dels cons drets, cons oblics, diàmetres conjugats i eixos de les línies corbes. Comença a entrar en matèria dins les proposicions, de més o menys complexitat, i serà on s'introduiran alguns nous conceptes; cal remarcar les proposicions XI, XII i XIII que construeixen i donen les propietats fonamentals que defineixen la paràbola, la hipèrbola i l'el·lipse a partir de la intersecció d'un pla i un con. Apol·loni és el primer que considera la hipèrbola amb les seves dues branques, les quals anomena «seccions oposades», com una única corba (proposició XVI), que fins aleshores s'havien considerat per separat.

Ens basem en la traducció al francès de Paul Ver Eecke, *Les coniques d'Apollonius de Perge* (Ver Eecke, 1963) i ens proposem analitzar les vuit definicions; en algunes utilitzarem el GeoGebra, així seguirem les pautes marcades per Apol·loni adaptant-nos i ajustant-nos amb el GeoGebra. Com a referència actual utilitzarem l'*Enciclopèdia Catalana*, consultable en línia[1] i en paper. Tot seguit transcriurem les definicions d'Apol·loni i les comentarem.

Primeres definicions

> **Definició I.** *Si, d'un cert punt, tracem una circumferència de cercle, no situat en el mateix pla del punt, una recta d'un punt a l'altre, i si, deixant el punt fix, la recta, girant seguint la circumferència, torna a la posició on ha començat a moure's, anomeno* ***superfície cònica*** *aquella que, descrita per la recta, esta composta de dues superfícies oposades segons el vèrtex, on cada una creix cap a l'infinit, la recta generatriu es prolonga cap l'infinit. Anomeno* ***vèrtex*** *d'aquesta superfície el punt fix, i el seu* ***eix*** *la recta determinada pel punt i el centre del cercle* (Ver Eecke, 1963: 3).

1. ENCICLOPÈDIA CATALANA, http://www.enciclopedia.cat, (darrer accés 27.11.11).

En la definició d'Apol·loni, la recta generatriu està *limitada a moure's* seguint una *circumferència*, a diferència de la definició actual que seguiria una corba tancada. L'*Enciclopèdia Catalana* defineix **superfície cònica** com a «Superfície engendrada per una família de rectes que passen per un punt (vèrtex) i recolzen sobre una corba directriu».

> **Definició II**. *Anomeno* ***con*** *la figura delimitada pel cercle i per la superfície cònica situada entre el vèrtex i la circumferència del cercle;* ***vèrtex del con,*** *el punt que és el vèrtex de la seva superfície;* ***l'eix del con,*** *la recta que va des del vèrtex al centre del cercle; i la* ***base,*** *el cercle* (Ver Eecke, 1963: 4).

La definició que trobem a l'*Enciclopèdia Catalana* ve a ser equivalent però és més general: «Cos limitat per una superfície cònica tancada (superfície lateral del con) i un pla (base del con), el qual talla la superfície cònica segons una corba tancada (directriu del con)».

Tal com ens defineix un con, actualment correspondria a un *con de base circular*, ja que el segment generatriu segueix una circumferència o equivalentment la corba directriu és una circumferència, i actualment diríem que és una superfície *de revolució*.

Notem que Apol·loni ja defineix la superfície cònica com una superfície de revolució i que distingeix segons si considera el con infinit (superfície de revolució) o el con finit (que anomena simplement con). També ens introdueix el nom dels elements del con com són generatriu, eix, vèrtex..., i en distingirà dos tipus:

> **Definició III**. *Per altra part, dins dels* ***cons****, dic* ***drets*** (o rectes) *els que tenen l'eix perpendicular a les bases, i* ***oblics*** *els que no tenen l'eix perpendicular a les bases* (Ver Eecke, 1963: 4).

Aquesta classificació que fa Apol·loni dels cons es correspon a l'actual. Tornant a l'*Enciclopèdia Catalana* hi trobem: «[...] Si l'eix és perpendicular al pla de la base, hom parla de con recte, el qual també pot ésser generat per un triangle rectangle que gira al voltant d'un dels seus catets; la directriu d'un con recte és una circumferència, de manera que un con recte és un cas particular de con de base circular. [...] Si l'eix d'un con de revolució no és perpendicular al pla de la base, hom parla de con oblic [...]».

Cal dir que en la tercera proposició, que segueix les definicions, Apol·loni considera la intersecció del con i un pla que conté l'eix del con, i demostra que aquesta secció és un triangle (triangle axial).

Ja fetes aquestes definicions bàsiques, Apol·loni ens defineix conceptes bàsics que s'aniran repetint al llarg de *Les Còniques*: diàmetre d'una línia corba, diàmetre de dues línies corbes, diàmetres conjugats, eix i eix conjugat. Aquestes definicions centren l'activitat que proposem, ja que la simplicitat del GeoGebra permet pautar o reestructurar els conceptes implícits de les definicions per fer-ne les construccions, que haurà de realitzar l'alumne, i obtenir resultats.

> **Definició IV**. *Dic* ***diàmetre de tota línia corba situada en un sol pla*** *la recta que, feta en la línia corba, talla en dues parts iguals totes les línies rectes fetes en la línia (corba) paral·lelament a una recta qualsevol;* ***vèrtex*** *de la línia corba, l'extrem d'aquesta recta (diàmetre) que està situat sobre la línia corba, en fi, dic* ***rectes fetes d'una forma ordenada al diàmetre*** *(les ordenades) cada una de les paral·leles* (Ver Eecke, 1963: 4).

La definició de diàmetre d'Apol·loni està limitada a corbes en el pla, i seria l'única diferència amb la definició actual. Si consultem l'*Enciclopèdia Catalana*, trobem: «Diàmetre: Línia que divideix per la meitat un sistema de cordes paral·leles d'una corba». O bé «Corda que passa pel centre d'una figura (un cercle, una secció cònica, una esfera)».

Estudiem aquestes definicions amb l'ajut del GeoGebra, ens preguntem: Un segment qualsevol pot ser diàmetre d'una cònica? Quan ho és? O bé, tenint en compte la definició: Com són els diàmetres en cada una de les còniques? Què tenen en comú? Quants diàmetres tindrà una el·lipse? I una hipèrbola? I una paràbola? En cada cas: Els diàmetres tenen alguna característica en comú? Observant les pautes donades per Apol·loni, una opció de procediment a seguir amb el GeoGebra serà:

1. Dibuixar una cònica (el·lipse, hipèrbola o paràbola).
2. Traçar una recta secant a la cònica, i un mínim de dues rectes més paral·leles a aquesta.
3. Trobar els punts d'intersecció de cada una de les tres rectes anteriors i la cònica.
4. Determinar per a cada parella de punts d'intersecció el seu punt mig.
5. Dibuixar la recta que passa per dos d'aquests punts mitjos (comprovarem que també passa pel tercer punt mig).
6. Trobar la intersecció d'aquesta última amb la cònica i traçar el segment entre els dos punts d'intersecció, obtenim així el diàmetre.

   A la pantalla gràfica del GeoGebra, mantenint premut el botó dret del cursor sobre l'element que es vol modificar, fàcilment se'ns permet variar la grandària, la posició, l'orientació... de la cònica, canviar la posició i l'orientació de la recta secant, i la posició de les rectes paral·leles, visualitzant en tot moment com és el diàmetre, si n'hi ha. Observem que en el seu tractat Apol·loni, a continuació de la proposició XVI del llibre I, afegeix unes segones definicions (tres) en les quals defineix el centre i el radi per a una el·lipse i per a una hipèrbola: «[...] El punt que divideix un diàmetre en dues parts iguals es diu centre de la secció; i la recta que va del centre a la secció es diu un radi de la secció [...]».

   En el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, podem dibuixar el seu centre:
7. En el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, podem trobar el centre com a punt mig del diàmetre, o bé com a punt mig entre els dos focus.

Els resultats que s'obtenen mostren que: per a l'el·lipse i per a la hipèrbola tindrem infinits diàmetres i tots ells passaran pel seu centre (Fig. 2). És a dir, el centre és un punt comú a tots els diàmetres, és el centre de la corba. Per a la paràbola els diàmetres serien semirectes perpendiculars a la recta directriu.

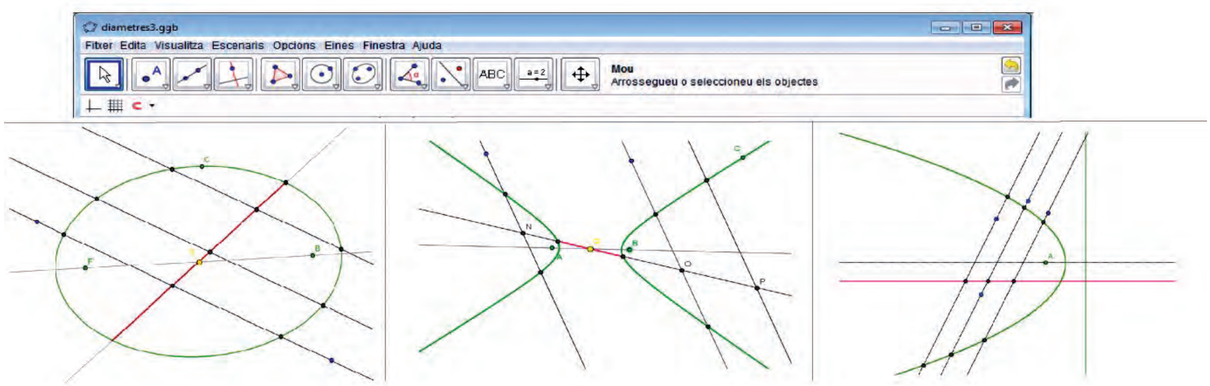

FIGURA 2. Composició, tres possibles pantalles del GeoGebra per a l'estudi del diàmetre.

> **Definició V**. *Jo dic també, de la mateixa forma,* ***diàmetre de dues línies corbes*** *situades en un mateix pla, per una part, la recta transversal que, tallant aquestes dues línies, talla en dues parts iguals totes les rectes fetes paral·lelament a una recta qualsevol a cada una d'aquestes línies, i* ***vèrtex d'aquestes línies****, els extrems del diàmetre situat sobre aquestes línies; per una part, la recta que, situada entre les dues línies, talla en dues parts iguals totes les rectes fetes paral·lelament a una recta qualsevol, i interceptades entre les línies; en fi, anomeno* ***rectes determinades d'una forma ordenada*** *al diàmetre de cada una d'aquestes paral·leles* (Ver Eecke, 1963: 4).

Aquesta definició no deixa de ser una ampliació de l'anterior. Seguir les mateixes pautes i tenir en compte els resultats de l'anterior definició ens ajudarà a deduir com seran els diàmetres. Per a cada cas podem preguntar-nos: Com són els diàmetres? Què tenen en comú? Quants n'hi haurà? Els resultats ens mostren que: en el cas de dues el·lipses cal que siguin concèntriques i tinguin la mateixa excentricitat. Si són dues paràboles hauran de tenir les rectes directrius paral·leles i el mateix paràmetre. Si es tracta de dues còniques diferents, en general, només en casos concrets podrem definir el diàmetre.

> **Definició VI**. *Anomeno* ***diàmetres conjugats*** *d'una línia corba i de dues línies corbes les rectes on cada una és un diàmetre que talla en dues parts iguals les rectes paral·leles a l'altra* (Ver Eecke, 1963: 4).
> **Definició VII**.*Per altra part, anomeno* ***eix d'una línia corba i de dues línies corbes*** *la recta que, diàmetre d'aquesta línia o d'aquestes línies, talla les paral·leles (és a dir les paral·leles al diàmetre conjugat d'aquest eix) amb angles rectes* (Ver Eecke, 1963: 4) .

Amb el GeoGebra procedint com s'ha dit i movent o variant el conjunt de rectes paral·leles es pot determinar quin o quins diàmetres seran eix. El GeoGebra també permet mesurar i tenir en tot moment el valor de l'angle entre diàmetre i paral·leles.

> **Definició VIII**. *Anomeno* ***eixos conjugats d'una línia corba i de dues línies corbes*** *les rectes que, diàmetres conjugats, tallen recíprocament les paral·leles a angles rectes* (Ver Eecke, 1963: 5).

Queden així definits els eixos de les còniques. Notem que amb el GeoGebra s'obtenen molts resultats amb poca estona. Hi ha proposicions i resultats d'Apol·loni que ara ens semblen molt evidents, i en resulten més quan utilitzem el GeoGebra, però en el seu moment van constituir un nou camí per treballar amb les còniques fent que el tractament amb les tangents, normals... fos més àgil i permetent-ne un ús més habitual.

La paràbola, l'el·lipse i la hipèrbola

Un cop donades aquestes primeres definicions, Apol·loni començarà a demostrar-nos resultats que actualment es donen per suposats. No és fins a la proposició XI que definirà constructivament el que són les còniques: la paràbola, la hipèrbola i l'el·lipse (a les proposicions XI, XII i XIII, respectivament) (Ver Eecke, 1963: 21-28). Aquestes definicions són dificultoses, i poc recomanables amb el llenguatge d'Apol·loni per treballar-les a classe (només com a curiositat es poden mostrar); en tot cas, per a cadascuna de les còniques es pot comprovar la seva equació genèrica, que es dedueix quan es considera la cònica com a secció del con. Nosaltres ens inclinaríem per seleccionar algunes altres de les proposicions per tal de tenir una visió més general, n'hi ha que trobem evidents mentre que d'altres les trobarem curioses o bé innovadores, i d'altres seran necessàries per a altres resultats.

Per exemple: a la proposició XLV del llibre III, Apol·loni determina el focus de l'el·lipse i la hipèrbola[2].

Cada vegada que utilitza els focus n'explicarà la construcció, no serà fins a Halley que aquests punts prendran el nom de «foci» (focus en la nomenclatura actual). Fixem-nos en les proposicions LI i LII del llibre III:

> **Proposició LI, llibre III:** *Si considerem les rectes que uneixen [...]* els focus *de la hipèrbola amb la secció, aleshores la més llarga excedeix a la més petita en l'eix* (Ver Eecke, 1963: 270).

Equivalentment, la diferència de distàncies de cada punt de la hipèrbola als focus és constant i igual a l'eix de la hipèrbola. Propietat important amb la qual Apol·loni s'avança i que ens permet construir la hipèrbola com un moviment continu, i que segles més tard donarà una manera planimètrica de construir-la. En el cas de l'el·lipse farà el mateix:

> **Proposició LII, llibre III:** *Si considerem les rectes que uneixen [...]* els focus *de l'el·lipse amb la secció, aleshores elles són iguals a l'eix* (Ver Eecke, 1963: 271-272).

És a dir, la suma de distàncies de cada punt de l'el·lipse als focus és constant i igual a l'eix de l'el·lipse, propietat molt important i utilitzada en l'el·lipse, que ens permet construir l'el·lipse, com en el cas de la hipèrbola, com un moviment continu (a la pràctica coneguda com el «mètode del pastor»).

Cal notar que actualment tenim molt clara la relació entre l'el·lipse que definim com el conjunt de punts tals que la suma de les seves distàncies a dos punts donats és constant i igual a l'eix gran i l'el·lipse vista com a secció del con. Apol·loni ens ha definit l'el·lipse com a secció d'un con i en dedueix i demostra com a propietat, en aquesta proposició, la primera. De la mateixa manera que ho ha fet per a la hipèrbola.

Conclusions

Creiem que aquesta activitat permet introduir una mica més d'història en el currículum. Amb l'ajuda del GeoGebra es comprenen gràficament les definicions i permet comprovar d'una forma àgil les propietats de les còniques.

Referència bibliogràfica

VER EECKE, P. (1963), *Les coniques d'Apollonius de Perga*, Paris, Libraire scientifique et Technique Albert Blanchard.

2. *Proposició XLV, llibre III:* Si considerem una hipèrbola, una el·lipse o una circumferència, i considerem una recta perpendicular als eixos pels seus extrems, i considerem un rectangle d'àrea equivalent a la quarta part de la figura (és a dir, la quarta part del quadrat de l'eix, de costat el paràmetre). Rectangle augmentat amb una figura quadrada en el cas de la hipèrbola, i disminuït en el cas de l'el·lipse. Fent una recta tangent a la corba que talli les rectes verticals pels extrems de l'eix, i fent una recta que vagi a parar als punts resultants d'aquesta operació, aleshores els angles són rectes (Ver Eecke,1963: 263).